
MEHR VEKTORANALYSIS

[H14] *Energie und Kraft geladener Kugeln* **[5 + 8 = 13 Punkte]**
Wir betrachten leitende Kugeln mit Radius R, die auf ihrer Oberfläche die Ladung Q tragen.

(a) Berechnen Sie die Energie des elektrischen Feldes einer einzelnen solchen Kugel. Die Ladung ist hier homogen verteilt.
(b) Betrachten Sie nun zwei identische Kugeln, deren Mittelpunkte sich in einem Abstand ℓ voneinander befinden. Berechnen Sie die Energie dieses Systems. Variieren Sie dann den Abstand ℓ und berechnen Sie so die Kraft zwischen den beiden Kugeln.

Hinweise:

(1) Da die Kugeln Leiter sind, ist das Potential auf ihren Oberflächen konstant. Aus Symmetriegründen ist diese Konstante auf beiden Oberflächen die gleiche und hat den Wert

$$\Phi \equiv \phi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in\partial K_i} = \frac{Q}{4\pi}\Big(\frac{1}{R} + \frac{1}{\ell - R}\Big)\,,$$

wobei ∂K_i die Oberfläche der Kugel K_i bezeichnet, $i = 1, 2$.
(2) In Anwesenheit einer zweiten Kugel ist die Ladung nicht mehr homogen verteilt. Beachten Sie aber, dass das Integral der Flächenladungsdichte σ über die gesamte Kugeloberfläche nach wie vor den Wert Q annimmt,

$$\int_{\partial K_i} \mathrm{d}^2 f\,\sigma(\theta,\varphi) = Q\,,$$

wobei ∂K_i die Oberfläche der Kugel K_i bezeichnet, $i = 1, 2$.
(3) Um nun die Energie zu berechnen, ersetze man in der Integration über die Energiedichte den Ausdruck $\vec{E}^2$ durch $-\vec{E}\cdot\operatorname{grad}\phi$, nutze partielle Integration und die Maxwellgleichung $\operatorname{div}\vec{E} = \rho$.

[H15] *Rotation und Divergenz* **[5 + 5 = 10 Punkte]**
Berechnen Sie die Rotation $(\mathrm{rot}\vec{A})^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k$ und die Divergenz $\mathrm{div}\vec{A} = \partial_j A^j$ der Vektorfelder

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \Re\mathrm{e}\,\vec{A}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\,,$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{J}{R^2}\vec{e}_\varphi & \text{falls}\quad \sqrt{x^2+y^2} < R \\ \frac{1}{2\pi}\frac{J}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_\varphi & \text{falls}\quad \sqrt{x^2+y^2} \geq R \end{cases}\,.$$

Dabei bezeichnet $\Re\mathrm{e}$ den Realteil und $\vec{A}_0$ einen konstanten Vektor. Weiter sind der Wellenvektor $\vec{k}$, der Strom J und der Radius R relle Konstanten. *Hinweis*: $\vec{e}_\varphi = (-y, x, 0)/\sqrt{x^2+y^2}$.

[H16] *Krummlinige Koordinaten* **[7 + 10* Punkte]**
Bei krummlinigen Koordinaten hängen die Basisvektoren vom jeweiligen Ort ab. Wir betrachten als Beispiel orthonormaler krummliniger Koordinaten Kugelkoordinaten. Der Gradient ist definiert durch den Ausdruck $\mathrm{grad} = \vec{e}_r\partial_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi\partial_\varphi$.

(a) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass für ein Vektorfeld $\vec{A} = A^r\vec{e}_r + A^\theta\vec{e}_\theta + A^\varphi\vec{e}_\varphi$ für die Divergenz gilt: $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2A^r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A^\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A^\varphi$. Beachten Sie dabei, dass die Basisvektoren ebenfalls von den Koordinten r, θ, φ abhängen.
(b*) Berechnen Sie explizit die Rotation $\operatorname{rot}\vec{A}$ in Kugelkoordinaten.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!